Справочник для решения уравнений в задании B12

- ***Линейное уравнение.*** $ax = b \quad (a \neq 0, \quad b \in \mathrm{R})$, тогда $x = b/a$.
- ***Квадратное уравнение.***

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$; дискриминант $D = b^2 - 4ac$;

если $D \geq 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

если $D < 0$, то действительных корней нет.

Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

- ***Простейшие логарифмические уравнения:***
  - $\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1) \ \Leftrightarrow \ x = a^b$;
  - $\log_a f(x) = b \ (a > 0, a \neq 1) \ \Leftrightarrow \ f(x) = a^b$;
- ***Простейшие тригонометрические уравнения:***
  - $\boxed{\sin x = a}$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathrm{Z}$ при $|a| \leq 1$.
    Уравнение решений не имеет при $|a| > 1$.
  - $\boxed{\cos x = a}$; $x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathrm{Z}$ при $|a| \leq 1$.
    Уравнение решений не имеет при $|a| > 1$.
  - $\boxed{\mathrm{tg}\, x = a}$; $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \ n \in \mathrm{Z}$.
  - $\boxed{\mathrm{ctg}\, x = a}$; $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, \ n \in \mathrm{Z}$.

Важно помнить при решении тригонометрических уравнений формулы:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $\quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$, $\quad \mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$.

- ***Частные случаи простейших тригонометрических уравнений:***
  - $\sin x = 0$, $x = \pi n, \ n \in \mathrm{Z}$, $\quad \cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$;

    $\mathrm{tg}\, x = 0$, $x = \pi n, \ n \in \mathrm{Z}$, $\quad \mathrm{ctg}\, x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$;
  - $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$, $\quad \cos x = 1$, $x = 2\pi n, \ n \in \mathrm{Z}$;

    $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$, $\quad \mathrm{ctg}\, x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$;
  - $\sin x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$, $\quad \cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathrm{Z}$;

    $\mathrm{tg}\, x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$, $\quad \mathrm{ctg}\, x = -1$, $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$;

- ***Простейшие логарифмические неравенства:***
  - *если* $a>1$: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x); \end{cases}$
  - *если* $0<a<1$: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

  Частные случаи:
  - *если* $a>1$: $\log_a f(x) > b \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>a^b$;
    $\log_a f(x) < b \quad \Leftrightarrow \quad 0<f(x)<a^b$;
  - *если* $0<a<1$: $\log_a f(x) > b \quad \Leftrightarrow \quad 0<f(x)<a^b$;
    $\log_a f(x) < b \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>a^b$.

- ***Логарифмические неравенства с переменным основанием:***

$$\log_{f(x)} g(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>1, \\ g(x)>f^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0<f(x)<1, \\ g(x)>0, \\ g(x)<f^b(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

- ***Простейшие показательные неравенства:***
  - *если* $a>1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>g(x)$;
  - *если* $0<a<1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<g(x)$.

  Частные случаи:
  - *если* $a>1,\ b>0$: $a^{f(x)} > b \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>\log_a b$,
    $a^{f(x)} < b \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<\log_a b$;
  - *если* $0<a<1,\ b>0$: $a^{f(x)} > b \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<\log_a b$,
    $a^{f(x)} < b \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>\log_a b$;
  - *если* $a>0,\ b<0$: $a^{f(x)} > b \quad \Leftrightarrow \quad -\infty<f(x)<+\infty$,
    $a^{f(x)} < b \quad \Leftrightarrow$ неравенство решений не имеет.

Квадратные неравенства

Квадратными неравенствами называются неравенства вида $ax^2+bx+c>0; ax^2+bx+c\geq 0; ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c\leq 0$,
где x — переменная; *a, b, c* — действительные числа, причем $a \neq 0$.

Существуют два метода решения квадратных неравенств: графический и аналитический.

1. При графическом методе решения определяется одно из шести возможных расположений графика – в зависимости от знаков старшего коэффициента *a* и дискриминанта D.

Например, если рассматривать неравенство $ax^2+bx+c\leq 0$, то его решением будут следующие значения *x*:

1) $[x_1; x_2]$, если $a>D; D>0$;
2) x_1, если $a>D; D=0$;
3) нет решений, если $a>D; D<0$;
4) $(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$, если $a<D; D>0$;
5) R, если $a<D; D=0$;
6) R, если $a<D; D<0$.

2. При аналитическом методе решения находятся корни квадратного трехчлена $(D\geq 0)$ и он раскладывается на множители: $a(x-x_1)(x-x_2)\leq 0$.
Далее, если *a*>0, то неравенство равносильно $(x-x_1)(x-x_2)\leq 0$;
если *a*<0, то неравенство равносильно $(x-x_1)(x-x_2)\geq 0$.
Затем полученные неравенства можно решить методом интервалов.