Справочник для решения уравнений в задании B5

- ***Линейное уравнение.*** $ax = b \quad (a \neq 0, \quad b \in \mathrm{R})$, тогда $x = b/a$.
- ***Квадратное уравнение.***

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$; дискриминант $D = b^2 - 4ac$;

если $D \geq 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

если $D < 0$, то действительных корней нет.

Уравнение с четным коэффициентом при x:

$\boxed{ax^2 + 2kx + c = 0}$, тогда $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Приведённое квадратное уравнение:

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$, тогда $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком; произведение корней равно свободному члену, то есть $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$.

- ***Некоторые простейшие уравнения:***
  - $|x| = b$. Решение: $x_1 = b, \quad x_2 = -b$, если $b > 0$;
    $x = 0$, если $b = 0$;
    корней нет, если $b < 0$.
  - $\sqrt{x} = b$. Решение: $x = b^2$, если $b \geq 0$;
    корней нет, если $b < 0$.
  - $x^{2n} = b, \ n \in N$. Решение: $x_{1,2} = \pm\sqrt[2n]{b}$, если $b > 0$;
    $x = 0$, если $b = 0$;
    корней нет, если $b < 0$.
  - $x^{2n+1} = b, \ n \in N$. Решение: $x = \sqrt[2n+1]{b}$ при $b \in R$.

Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

- ***Простейшие логарифмические уравнения:***
  - $\log_a x = b \ (a>0,\ a\neq 1) \ \Leftrightarrow \ x = a^b$;
  - $\log_a f(x) = b \ (a>0,\ a\neq 1) \ \Leftrightarrow \ f(x) = a^b$;
  - $\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a>0,\ a\neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$
    (выбирается та из систем, в которой неравенство проще).
- ***Простейшие показательные уравнения:***

  Метод решения: логарифмирование обеих частей уравнения по основанию a.
  - $a^x = b \quad (a,b>0,\ a\neq 1) \quad \Leftrightarrow \quad x=\log_a b$. Если $b\le 0$, то решений нет;
  - $a^{f(x)} = b \quad (a,b>0,\ a\neq 1) \ \Leftrightarrow \ f(x)=\log_a b$. Если $b\le 0$, то решений нет;
  - $a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (a>0,\ a\neq 1) \ \Leftrightarrow \ f(x)=g(x)$;
  - $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $\quad \Leftrightarrow \quad f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$,
    $(a,b>0,\ a,b\neq 1)$. $\qquad (c>0, c\neq 1)$.
- ***Простейшие тригонометрические уравнения:***
  - $\boxed{\sin x = a}$; $\quad x=(-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n\in Z$ при $|a|\le 1$.
    Уравнение решений не имеет при $|a|>1$.
  - $\boxed{\cos x = a}$; $\quad x=\pm\arccos a + 2\pi n,\ n\in Z$ при $|a|\le 1$.
    Уравнение решений не имеет при $|a|>1$.
  - $\boxed{\operatorname{tg} x = a}$; $\quad x=\operatorname{arctg} a + \pi n,\ n\in Z$.
  - $\boxed{\operatorname{ctg} x = a}$; $\quad x=\operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n\in Z$.

  Важно помнить при решении тригонометрических уравнений формулы:

  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $\qquad \arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

  $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, $\qquad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.
- ***Частные случаи простейших тригонометрических уравнений:***
  - $\sin x = 0$, $x=\pi n,\ n\in Z$, $\qquad \cos x = 0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$;

    $\operatorname{tg} x = 0$, $x=\pi n,\ n\in Z$, $\qquad \operatorname{ctg} x = 0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$;
  - $\sin x = 1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, $\qquad \cos x = 1$, $x=2\pi n,\ n\in Z$;

    $\operatorname{tg} x = 1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, $\qquad \operatorname{ctg} x = 1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$;
  - $\sin x = -1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, $\qquad \cos x = -1$, $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$;

    $\operatorname{tg} x = -1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, $\qquad \operatorname{ctg} x = -1$, $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$;
  - $$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$
    где $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad \cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$.