Векторы и их геометрические приложения

- Если в декартовой прямоугольной системе координат заданы начало $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец $B(x_2, y_2, z_2)$ ***вектора*** $\overline{AB}$, то он имеет ***координаты***

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$

а его ***длина*** (то есть расстояние между точками A и B) вычисляется по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- Действия над векторами, заданными своими координатами, выполняются по следующим правилам:

если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2,\ z_1 + z_2),$$
$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2,\ z_1 - z_2),$$
$$\lambda\,\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda\, z_1),\ \ \lambda \in R.$$

- ***Скалярным произведением*** векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\widehat{\overline{a}\overline{b}}\right)$$

или в координатах

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

- ***Косинус угла между векторами*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\left(\widehat{\overline{a}\overline{b}}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

- ***Условие перпендикулярности*** двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеет вид

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

- ***Условие коллинеарности*** *(параллельности)* двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеет вид

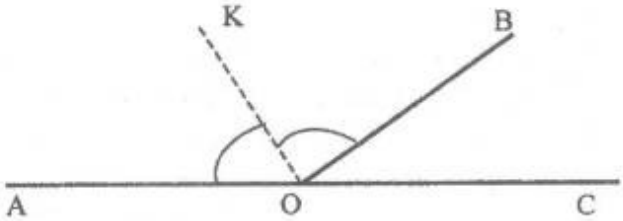
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

- ***Координаты середины отрезка*** с концами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Планиметрия

- Два угла ($\angle AOB$ и $\angle BOC$) называются ***смежными***, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют продолжение одна другой.



Луч OK, делящий угол AOB пополам, называется ***биссектрисой этого угла.***

- ***Условия существования треугольника.***

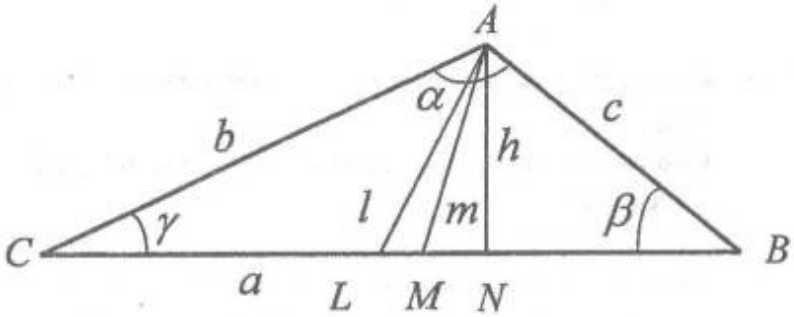
Для существования треугольника со сторонами a, b, c необходимо и достаточно выполнения трёх неравенств

$$\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a. \end{cases}$$

- ***Зависимость сторон треугольника от углов.***

Напротив большей стороны треугольника лежит больший угол, и наоборот, напротив большего угла лежит большая сторона.

- Рассмотрим ***треугольник*** ABC, в котором a, b, c - длины сторон, лежащие, соответственно, против углов α, β, γ;



h_a, m_a, l_a - длины высоты, медианы и биссектрисы треугольника, проведённые из вершины A; $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ - полупериметр; S - площадь; R и r - радиусы описанной и вписанной в треугольник окружностей; $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

- ***Медианой треугольника*** называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Свойства:

1) медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника;
2) медиана делит треугольник на два равновеликих (имеющих равные площади) треугольника;
3) длина медианы находится по формуле

$$m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2-ac\cos\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}.$$

- ***Биссектрисой внутреннего угла треугольника*** называется отрезок прямой, делящий данный угол на две равные части.

  Свойства:
  1) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника и являющейся центром окружности, вписанной в треугольник;
  2) биссектриса треугольника есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла;
  3) биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника, то есть AL-биссектриса $\Rightarrow \dfrac{AC}{CL}=\dfrac{AB}{BL}$;
  4) длина биссектрисы находится по формуле

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)\,(b+c-a)}}{b+c}.$$

- ***Высотой треугольника*** называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или на её продолжение.

  Свойства:
  1) высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром;
  2) высота, проведённая из вершины равнобедренного треугольника, является также биссектрисой и медианой.

- ***Средней линией треугольника*** называется отрезок, соединяющий середины двух сторон.
  Свойство: средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине.

- ***Описанная окружность.*** Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну, центр которой находится в точке пересечения срединных перпендикуляров.

  Радиус описанной окружности находится по формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$.

- ***Вписанная окружность.*** Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну, центр которой находится в точке пересечения биссектрис.

  Радиус вписанной в треугольник окружности находится по формуле $r=\dfrac{S}{p}$.

- ***Признаки равенства треугольников.*** Два треугольника являются равными, если выполняется одно из условий:

  1) две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника;
  2) два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника;
  3) три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника.

- ***Признаки подобия треугольников.*** Два треугольника подобны, если
  1) три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого треугольника;
  2) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
  3) две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими сторонами, равны.

- ***Теорема синусов:*** $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R.$

- ***Теорема косинусов:*** $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha,$

  $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta,$

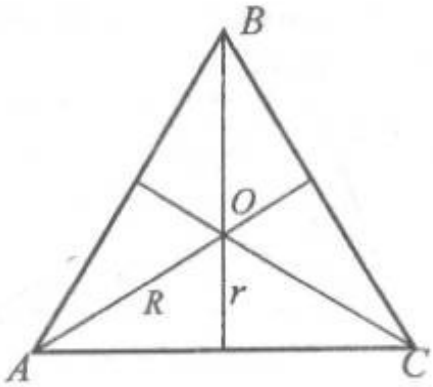
  $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma.$

- ***Формулы для вычисления площади треугольника:***

  $S=\dfrac{1}{2}ah;$ $\quad S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma;$ $\quad S=rp;$ $\quad S=\dfrac{abc}{4R};$

  $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона.

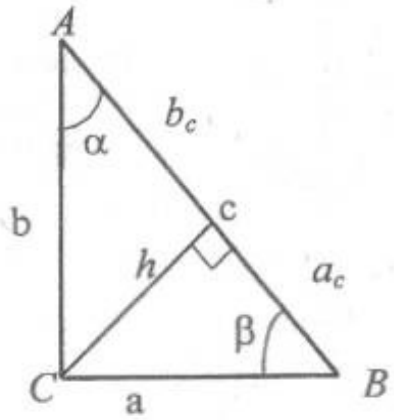
- ***Равносторонний треугольник.***



В равностороннем треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины, совпадают. Точка О – центр симметрии треугольника, точка пересечения высот, медиан и биссектрис, центр вписанной и описанной окружностей.

$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\qquad r=\dfrac{1}{2}R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.$

- ***Прямоугольный треугольник.***



В прямоугольном треугольнике катеты a, b и гипотенуза c связаны равенством

$a^2+b^2=c^2$ (***теорема Пифагора***).

$S=\dfrac{1}{2}ab,\qquad r=\dfrac{a+b-c}{2},\qquad R=\dfrac{c}{2},$

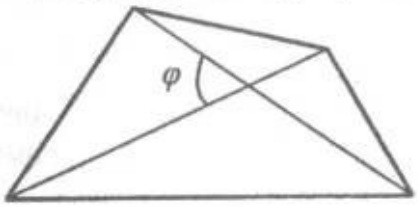
$\sin\alpha=\dfrac{a}{c},\quad \cos\alpha=\dfrac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b},\quad \operatorname{ctg}\beta=\dfrac{b}{a},$

$h_c^2=a_cb_c,\quad a^2=c\cdot a_c,\quad b^2=c\cdot b_c,\quad h_c=\dfrac{ab}{c}.$

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

Катет, лежащий против угла 30^0, равен половине гипотенузы.

- ***Выпуклый четырёхугольник.***



Площадь равна $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1 и d_2 - диагонали четырёхугольника, φ - угол между диагоналями.

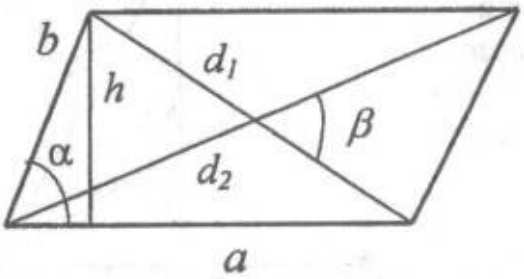
Свойства:

1) В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны друг другу.
2) Около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны 180^0.

- ***Параллелограмм*** – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

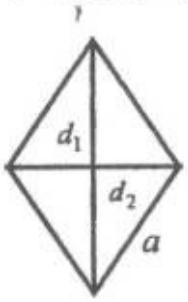
Свойства:

1) противоположные стороны параллелограмма равны;
2) противоположные углы параллелограмма равны;
3) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;
4) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;
5) сумма внутренних углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180^0.



$$S = ah = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\beta,$$
$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

- ***Ромб*** – это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Свойства:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
2) диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов;
3) во всякий ромб можно вписать окружность, центром которой является точка пересечения диагоналей ромба.

Площадь ромба равна $S = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

- ***Прямоугольник*** – это параллелограмм, у которого все углы прямые.
Площадь прямоугольника $S = a \cdot b$.

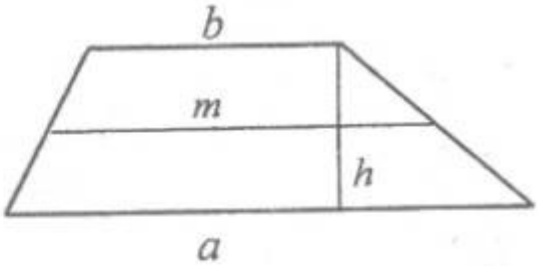
- ***Квадрат*** – это прямоугольник, у которого все стороны равны.
Площадь квадрата $S = a^2$.

- ***Трапеция*** – это четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

  Параллельные стороны называются основаниями трапеции (нижним и верхним), а не параллельные – боковыми сторонами.

  Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ***средней линией*** трапеции.

  Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = (a+b)/2$.



  Площадь трапеции равна

$$S = (a+b)h/2 = h \cdot m.$$

  Около трапеции можно описать окружность в том и только том случае, если она равнобочная, т.е. её боковые рёбра равны.

- ***Многоугольники.*** Сумма углов выпуклого n - угольника равна $180^0(n-2)$.

- ***Окружность и круг. Вписанные углы.***

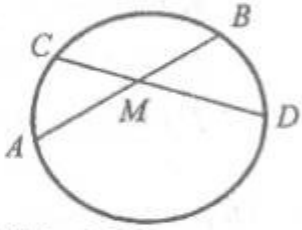
  Окружностью называется множество точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки плоскости, называемой ***центром*** окружности.

  Круг состоит из окружности и внутренних точек.

  Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

  Свойства хорд:

  1) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;
  2) равные хорды окружности равноудалены от её центра и наоборот;
  3) если через точку М внутри окружности проведены две хорды, то произведения отрезков хорд равны: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.



  Касательной к окружности называется прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну общую точку.

  Касательная к окружности ***перпендикулярна радиусу***, проведённому в точку касания.

  Вписанным в окружность называется угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности.

  Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

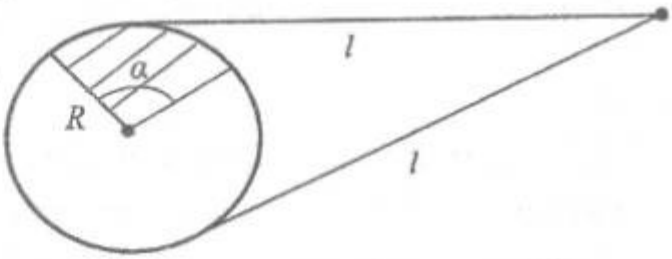
  Центральным углом называется угол, образованный двумя радиусами окружности.

  Центральный угол измеряется дугой окружности, на которую он опирается.

- ***Теорема о касательной и секущей.***

  Если из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательная MC и секущая MAB, то $MC^2 = MA \cdot MB$.

- ***Теорема о касательных.*** Касательные, проведённые к окружности из одной точки, имеют одинаковую длину.



  Длина окружности $L = 2\pi R$.

  Площадь круга $S = \pi R^2$.

  Площадь сектора круга $S = \dfrac{\pi R^2 \alpha^0}{360^0}$ и $S = R^2\alpha/2$, если α измеряется в радианах.