Преобразования алгебраических выражений

- ***Формулы сокращённого умножения:***

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	разность квадратов;
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	квадрат суммы или разности;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	куб суммы или разности;
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$	сумма или разность кубов;
$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$	сумма квадратов;
$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$	сумма квадратов.

- ***Свойства степеней:*** для любых x, y и положительных a и b верны равенства

$$a^0 = 1; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \qquad a^{-1} = \frac{1}{a};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

- ***Свойства арифметических корней:***

  - для $n \in \mathrm{N}, m \in \mathrm{Z}$ и $a \geq 0$ применяется обозначение $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$;
  - для любых натуральных чисел n и k и любых неотрицательных чисел a и b верны равенства

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{a^n} = a;$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } a < b; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a};$$

  - для любого действительного числа a верны равенства $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

- ***Свойства логарифмов:***

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ где } b > 0, \quad a > 0, \ a \neq 1;$$

$a^{\log_a b} = b$ - **основное логарифмическое тождество.**

При $x, y > 0$, $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$:

$\log_a a = 1$, $\qquad \log_a 1 = 0$;

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\qquad \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

$\log_a x^k = k \log_a x$, $\qquad \log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_a x$.

Переход к новому основанию:

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $\qquad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $\qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Тригонометрия

- ***Основные тригонометрические формулы:***

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$
$$\Rightarrow \quad \cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\qquad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$;

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\qquad \operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\qquad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;

$\operatorname{tg} \alpha = 1/\operatorname{ctg} \alpha$, $\qquad \operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$;

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

- ***Формулы кратных аргументов:***

$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$, $\qquad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, отсюда $\sin^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, отсюда $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$;

$$1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2;$$
$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2;$$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, $\qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$, $\qquad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$;

$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$, $\qquad \operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

- ***Формулы половинного аргумента:***

$$\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}, \qquad \boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

- ***Формулы сложения:***

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x;$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{ctg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y\mp 1}{\operatorname{ctg}y\pm\operatorname{ctg}x}.$$

- ***Формулы преобразования сумм или разностей в произведения:***

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \qquad \operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=\frac{\pm\sin(x\pm y)}{\sin x\sin y};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos(45^0-x)=\sqrt{2}\sin(45^0+x);$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin(45^0-x)=\sqrt{2}\cos(45^0+x);$$

$$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}, \qquad 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2};$$

$$1+\sin x=2\cos^2(45^0-\frac{x}{2}), \qquad 1-\sin x=2\sin^2(45^0-\frac{x}{2});$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{2}{\sin 2x};$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-2\operatorname{ctg}2x.$$

- ***Формулы преобразования произведений в суммы или разности:***

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y));$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

- ***Формулы приведения:***

1. Любая тригонометрическая функция угла $(90^0 n + \alpha)$ по абсолютной величине равна ***той же функции угла*** α, если n - чётное, и ***кофункции угла*** α, если n - нечётное.
2. Если функция угла $(90^0 n + \alpha)$ положительна, когда α - острый угол, то знаки обеих функций одинаковы.

   Если функция угла $(90^0 n + \alpha)$ отрицательна, когда α - острый угол, то знаки обеих функций различны.

Примеры: $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$; $tg(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -ctg\alpha$ и т.п.

- ***Значения тригонометрических функций основных углов:***

Функция	Угол							
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

- ***Обратные тригонометрические функции:***

$$\begin{matrix} y = \arcsin x, \\ x \in [-1;1]. \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x, \\ y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = \arccos x, \\ x \in [-1;1]. \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x, \\ y \in [0;\pi]; \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y = \mathrm{arctg}\ x, \\ x \in (-\infty;+\infty). \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\ y = x, \\ y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}); \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = \mathrm{arcctg}\ x, \\ x \in (-\infty;+\infty). \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{ctg}\ y = x, \\ y \in (0;\pi). \end{cases}$$

- ***Соотношения прямых и обратных тригонометрических функций:***

$$\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = x;$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x;$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad (|x| \le 1);$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{при} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}];$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{при} \quad x \in [0; \pi];$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x \quad \text{при} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2});$$

$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x \quad \text{при} \quad x \in (0; \pi).$$